LXIV Międzyszkolne Zawody Matematyczne

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja:
jeden punkt za każdą poprawną odpowiedź, zero punktów za brak odpowiedzi, minus jeden punkt za odpowiedź niepoprawną i jeden punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\mathbb{Q}_+$ – zbiór liczb wymiernych dodatnich.
(3) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ - symbol Newtona

1. Liczby naturalne a, b, c, d nie są podzielne przez 5, przy czym liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ są podzielne przez 5. Wtedy
   a) ..NIE.. liczba $a+c$ jest podzielna przez 5;
   b) ..TAK.. liczba $a+d$ jest podzielna przez 5;
   c) ..TAK.. liczba $(a-c)(a+c+2ab)$ jest podzielna przez 5.

2. Liczba $\dfrac{7+\sqrt{35}}{5+\sqrt{35}} \cdot \dfrac{5+\sqrt{55}}{11+\sqrt{55}} \cdot \dfrac{11+\sqrt{77}}{7+\sqrt{77}}$ jest
   a) ..TAK.. wymierna;
   b) ..NIE.. większa od 1;
   c) ..TAK.. pierwiastkiem równania $x^2 - 3x + 2 = 0$.

3. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O oraz $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$. Wówczas
   a) ..TAK.. czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym;
   b) ..NIE.. proste BC i AD są równoległe;
   c) ..NIE.. proste AB i CD są równoległe.

4. Czy podane poniżej liczby są kwadratem liczby naturalnej?
   a) ..NIE.. $\underbrace{666\ldots66}_{2024\text{ cyfr}}$;
   b) ..TAK.. $1\underbrace{000\ldots0}_{2024\text{ cyfr}}2\underbrace{000\ldots0}_{2024\text{ cyfr}}1$
   c) ..TAK.. $\underbrace{111\ldots1}_{2023\text{ cyfr}}\underbrace{222\ldots2}_{2024\text{ cyfr}}5$

5. Istnieje zbiór 2024 odcinków na płaszczyźnie taki, że każdy z nich ma punkt wspólny
   a) ..TAK.. z każdym innym;
   b) ..TAK.. dokładnie z 1012 innymi odcinkami;
   c) ..TAK.. z dokładnie trzema innymi odcinkami.

6. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $|AP| < |CP|$ oraz $|BP| < |DP|$. Wynika z tego, że

   a) ..NIE.. $|AB| < |CD|$;

   b) ..TAK.. obwód trójkąta ABP jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP;

   c) ..NIE.. odległość punktu P od prostej AB jest mniejsza od odległości P od prostej CD.

7. Liczba $a_k = \dfrac{1}{2^k \cdot 7}$ dla $k \in \mathbb{N}$ zapisana w systemie dziesiętnym jest ułamkiem okresowym. Wtedy

   a) ..TAK.. liczby $3a_5$ i $5a_3$ mają okresy tej samej długości;

   b) ..TAK.. dla $k = 7$ okres liczby a_7 zaczyna się od 8 cyfry po przecinku;

   c) ..NIE.. dla $k > 7$ długość okresu liczby a_k jest większa od 6.

8. Dwie wysokości pewnego trójkąta mają długość większą niż 1. Stąd

   a) ..NIE.. trzecia wysokość również ma długość większą niż 1;

   b) ..TAK.. każdy z boków tego trójkąta ma długość większą niż 1;

   c) ..TAK.. pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

9. Oznaczmy $a_n = (7+\sqrt{48})^n + (7-\sqrt{48})^n$. Czy prawdą jest, że

   a) ..NIE.. $a_3 = 14^3$;

   b) ..TAK.. $a_4 = 14a_3 - a_2$;

   c) ..TAK.. a_{13} dzieli się przez 14?

10. Rozważmy funkcje $m, l\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ określone wzorami

$$m\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{p+q}, \quad l\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q}.$$

Mówimy, że ułamek $\frac{a}{b}$ otrzymaliśmy z ułamka $\frac{c}{d}$, jeżeli wychodząc od ułamka $\frac{c}{d}$ i działając funkcjami m i l w pewnym momencie otrzymamy ułamek $\frac{a}{b}$. Wówczas

   a) ..TAK.. jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to każdy ułamek otrzymany z niego jest nieskracalny;

   b) ..NIE.. jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ otrzymamy z ułamka $\frac{c}{d}$, to ułamek $\frac{c}{d}$ otrzymamy z ułamka $\frac{a}{b}$;

   c) ..TAK.. z ułamka $1 = \frac{1}{1}$ otrzymamy każdy nieskracalny ułamek z $\mathbb{Q}_+$.

11. W kuli o promieniu 1 wybrano 9 punktów $A_1, \dots, A_9$, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej ani żadne 4 na jednej płaszczyźnie. Wynika z tego, że:

   a) ..TAK.. istnieją dwa punkty w odległości nie większej niż $\sqrt{3}$;

   b) ..TAK.. istnieją dwa punkty A_i, A_j takie, że kąty $\sphericalangle A_k A_i A_j$ i $\sphericalangle A_k A_j A_i$ są ostre dla każdego $k \neq i$ oraz $k \neq j$;

   c) ..TAK.. istnieje takie ułożenie punktów $A_1, \dots, A_9$, w którym objętość czworościanu o wierzchołkach A_1, A_2, A_3, A_4 jest większa niż $\frac{1}{2}$.

12. Niech p i q będą ustalonymi niezerowymi liczbami rzeczywistymi. Niech liczby a, b i c takie, że $a < b < c$, spełniają równości

$$a^3 + pa + q = 0, \quad b(b^2 + p) = -q, \quad -c^3 = pc + q.$$

Wtedy

a) ..TAK. $a + b + c = 0$;

b) ..NIE.. $ab \cdot \frac{c+3}{3} + bc \cdot \frac{a+3}{3} + ac \cdot \frac{b+3}{3} = p + q$;

c) ..NIE.. istnieją takie p i q różne od 0, że b jest średnią arytmetyczną a i c.

13. Czy następujące równości są prawdziwe?

a) ..TAK.. $k \cdot \binom{2024}{k} = 2024 \cdot \binom{2023}{k-1}$ dla $k \in \{1, 2, \ldots, 2023\}$;

b) ..TAK.. $\binom{2k}{k} = 2 \cdot \binom{2k-1}{k}$ dla każdej liczby naturalnej k;

c) ..NIE.. $\dfrac{\binom{2}{1} + \binom{4}{2} + \binom{6}{3} + \ldots + \binom{2024}{1012}}{\binom{1}{1} + \binom{3}{2} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{2023}{1012}} = 1 + \dfrac{2024}{2023}$.

14. Rozważmy funkcję wielomianową $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ dla pewnych ustalonych współczynników a_i, gdzie $a_n \neq 0$. Wówczas

a) ..NIE.. można tak dobrać liczby $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, aby $W(7) = 5$ i $W(15) = 9$;

b) ..TAK.. jeżeli $W(1) = 0$ oraz $W(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $a_n + 2a_{n-1} + \ldots + (n+1)a_0 = 0$;

c) ..TAK.. jeżeli $x \cdot W(x-1) = (x-2) \cdot W(x)$, to wielomian $W(x)$ ma stopień 2.

15. Istnieją trzy różne liczby naturalne nieparzyste a, b, c takie, że

a) ..TAK.. ciąg bc, ac, ab jest ciągiem geometrycznym;

b) ..NIE.. zachodzi równość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2024}$;

c) ..TAK.. ciąg $\frac{a+1}{a}, \frac{b+1}{b}, \frac{c+1}{c}$ jest ciągiem arytmetycznym.

16. Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P. Wtedy

a) ..NIE.. jeśli $|CP| = |DP|$, to również $|AP| = |BP|$.

b) ..TAK.. jeśli $|AP| = 2$, $|BP| = 8$ i $|CP| + |DP| = 8$, to BP jest środkową trójkąta $\triangle CBD$;

c) ..TAK.. jeżeli $|AP| = |BP|$ i $|CP| = |DP|$, to P jest środkiem okręgu;

17. W kartezjańskim układzie współrzędnych dane są punkty $A_i = (i, 0)$ oraz $B_i = (i, 1)$, $i = 1, \ldots, 100$. Losujemy 4 spośród nich.

a) ..TAK.. Prawdopodobieństwo, że wylosowane punkty tworzą prostokąt, jest mniejsze niż $\frac{1}{10^4}$.

b) ..NIE.. Prawdopodobieństwo, że wylosowane punkty są współliniowe, jest większe od $\frac{1}{8}$.

c) ..NIE.. Prawdopodobieństwo, że wylosowane punkty tworzą czworokąt o polu 4, jest mniejsze niż $\frac{1}{2024}$.

18. Pole trójkąta, którego współrzędne wszystkich wierzchołków w układzie kartezjańskim są liczbami całkowitymi, jest liczbą całkowitą, jeśli

    a) ..TAK.. obie współrzędne wszystkich wierzchołków są liczbami nieparzystymi;

    b) ..NIE.. obie współrzędne co najmniej jednego wierzchołka są liczbami parzystymi;

    c) ..TAK.. współrzędne każdego wierzchołka są parą liczb, z których jedna jest parzysta, a druga nieparzysta.

19. Funkcja $f(x)$ spełnia warunek $f(x)+2f(1-x)=x^2$. Wówczas

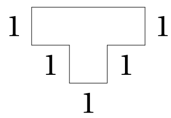
    a) ..NIE.. istnieje nieskończenie wiele takich funkcji;

    b) ..NIE.. funkcja $f(x)$ może być parzysta;

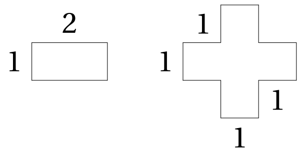
    c) ..NIE.. funkcja $f(x)$ nie ma miejsc zerowych.

20. Czy szachownicę wymiaru

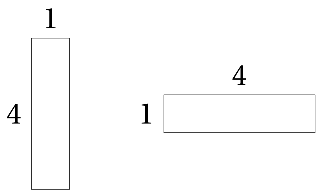
    a) ..NIE.. 10×10 można pokryć kształtami



    b) ..NIE.. 25×25 można pokryć dwoma rodzajami kształtów



    c) ..NIE.. 10×10 można pokryć prostokątami



    W powyższych rysunkach wszystkie sąsiadujace odcinki są wzajemnie prostopadłe, a liczby przylegające do danego odcinka oznaczają jego długość.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału [0; 10] (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wykazać, że liczba

$$\left\lfloor (\sqrt{2}+1)^{2024} \right\rfloor$$

jest nieparzysta.

Oznaczenie: $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x, czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x.

Rozwiązanie:

Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2024} = \sum_{k=0}^{2024} \binom{2024}{k} \sqrt{2}^{2024-k},$$
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2024} = \sum_{k=0}^{2024} \binom{2024}{k} \sqrt{2}^{2024-k} (-1)^k.$$

Dodając stronami, dostajemy:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2024} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{2024} = 2\sum_{l=0}^{1012} \binom{2024}{2l} \sqrt{2}^{2024-2l} = 2A$$

dla pewnego $A \in \mathbb{Z}$. Ponieważ $\sqrt{2}-1 \in (0,1)$, więc $(\sqrt{2}-1)^{2024} \in (0,1)$. Stąd

$$2A-1 < (\sqrt{2}+1)^{2024} < 2A$$

Zatem

$$\left\lfloor (\sqrt{2}+1)^{2024} \right\rfloor = 2A-1,$$

co należało pokazać.

2. Na trójkącie równobocznym $\triangle ABC$ o boku długości 1 opisano okrąg. Niech M będzie dowolnym punktem tego okręgu. Pokazać, że

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 2.$$

Rozwiązanie:

Pokażemy rozwiązanie korzystające z wektorów. Jeśli $M \in \{A, B, C\}$, to teza jest oczywista. Niech zatem $M \notin \{A, B, C\}$. Oznaczmy przez O środek okręgu. Mamy teraz:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$

Ponadto $|MO| = |OA| = |OB| = |OC| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 &= \overrightarrow{MA} \circ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \circ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \circ \overrightarrow{MC} = \\
&= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \circ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \circ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \circ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = \\
&= 3|\overrightarrow{MO}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\overrightarrow{MO} \circ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \\
&= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 0 = 2.
\end{aligned}$$