

## LXIII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

## I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

*Punktacja:*

1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, –1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

*Oznaczenia:*

(1)  $\mathbb{N}$  – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

(2)  $\lfloor x \rfloor$  – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga)  $x$ , czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa  $x$ .

1. Liczba  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 37$

- a) ..... jest podzielna przez 2023;
- b) ..... jest podzielna przez  $10^9$ ;
- c) ..... jest większa od liczby  $19^{37}$ .

2. Przekątne trapezu  $ABCD$  o podstawach  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  przecinają się w punkcie  $E$ , a proste zawierające ramiona trapezu w punkcie  $F$ . Pole trójkąta  $\triangle ABE$  jest równe 12, a pole trójkąta  $\triangle DCE$  jest równe 3. Wówczas

- a) ..... obwód trójkąta  $\triangle ABE$  jest dwa razy większy od obwodu trójkąta  $\triangle DCE$ ;
- b) ..... obwód trójkąta  $\triangle ABF$  jest cztery razy większy od obwodu trójkąta  $\triangle DCF$ ;
- c) ..... pole trójkąta  $\triangle ABF$  jest cztery razy większe od pola trójkąta  $\triangle DCF$ .

3. Można tak dobrać liczbę rzeczywistą  $m$ , aby układ

$$\begin{cases} |x - y| = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

- a) ..... nie miał rozwiązań;
- b) ..... miał dokładnie jedno rozwiązanie;
- c) ..... miał nieskończenie wiele rozwiązań.

4. Dany jest ciąg  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2023}$ . Wówczas

- a) .....  $a_n$  jest ciągiem geometrycznym;
- b) .....  $a_n$  jest ciągiem malejącym;
- c) .....  $a_{2023} < \pi$ .

5. Symbol  $\sum_{k=1}^n a_k$  oznacza sumę  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Stwierdź prawdziwość poniższych zdań.
- .....  $\sum_{k=1}^{2023} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} > 0$
  - .....  $\sum_{k=1}^{2022} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} + 2023 = 0$
  - .....  $\left(\sum_{k=1}^{2021} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^{2022} > 1$
6. Dana jest liczba naturalna  $n$ . Wtedy
- ..... iloczyn  $(8n - 2)(8n - 1)8n$  jest podzielny przez 24;
  - ..... jeśli  $n$  oraz  $8n - 1$  są liczbami pierwszymi to liczba  $8n - 3$  jest liczbą pierwszą;
  - ..... jeśli  $n$  oraz  $8n - 1$  są liczbami pierwszymi to liczba  $(8n)^2 - (8n - 1)^2$  jest podzielna przez 3.
7. Niech  $p_k(X)$  oznacza liczbę  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego  $X$ , gdzie  $k \leq n$ . Istnieje taki zbiór  $X$ , że:
- .....  $p_3(X) = 2p_4(X)$ ;
  - .....  $p_3(X) = 3p_4(X)$ ;
  - .....  $2p_6(X) = p_5(X) + p_7(X)$ .
8. Niech wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości 1 dany będzie punkt  $P$ , a  $x, y, z$  oznaczają odległości tego punktu od boków trójkąta. Wówczas
- .....  $x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
  - .....  $xyz = \frac{1}{3}$ ;
  - .....  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ .
9. Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją określoną wzorem  $f(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$ . Wówczas
- ..... funkcja  $f(x)$  jest parzysta;
  - ..... dla każdego  $x, y \in \mathbb{R}$  zachodzi  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ ;
  - ..... funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$  jest nieparzysta.
10. Stosunek długości podstawy  $\overline{AB}$  do długości ramienia  $\overline{BC}$  trójkąta równoramiennego  $\triangle ABC$  jest równy  $m$ . Oznaczmy miarę kąta  $\angle ACB$  jako  $\gamma$ . Wtedy
- .....  $m \in (0, 2)$ ;
  - .....  $\cos(\gamma) = 1 - \frac{m^2}{2}$ ;
  - ..... jeżeli  $m \in (1, 2)$ , to trójkąt  $\triangle ABC$  jest rozwartokątny.

11. Równanie  $|x^2 + ax + b| = 1$  ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3$  takie, że  $x_1 < x_2 < x_3$ . Wtedy
- .....  $x_3$  musi być liczbą dodatnią;
  - .....  $2x_2 - x_1 = x_3$ ;
  - .....  $x_3 - x_1 = 2$ .
12. Wielomian  $x^{2023} - 2023x - 1$
- ..... ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny;
  - ..... nie ma pierwiastków rzeczywistych;
  - ..... ma dwa pierwiastki rzeczywiste tego samego znaku.
13. Funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona jest wzorem  $f(x) = x^3 + ax + 1$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  jest pewną liczbą rzeczywistą. Wówczas
- .....  $f(x)$  jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy  $a > 0$ ;
  - .....  $f(x)$  jest funkcją rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy  $a < 0$ ;
  - ..... istnieje liczba wymierna  $a$ , dla której wielomian  $f(x)$  ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.
14. Zbiór  $A = \{(x, y) : \cos(x^2 + y^2) < 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  jest podzbiorem płaszczyzny  $XOY$ . Wówczas
- .....  $A$  jest zbiorem pustym;
  - ..... w zbiorze  $A$  zawiera się pewien okrąg o promieniu 1;
  - ..... w zbiorze  $A$  zawiera się pewien okrąg o promieniu 2.
15. Oznaczmy przez  $\xi(n)$  liczbę złożoną z  $n$  jedynek, czyli  $\xi(n) = \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ razy}}$ .
- ..... Jeżeli  $n$  jest liczbą pierwszą, to  $\xi(n)$  jest liczbą pierwszą.
  - ..... Jeżeli  $n$  jest liczbą złożoną, to  $\xi(n)$  jest liczbą złożoną.
  - ..... Liczba  $\xi(27)$  jest podzielna przez 27.
16. Oznaczmy przez  $\rho(n)$  liczbę  $\sqrt{\underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ razy}} - \underbrace{22 \dots 2}_{n \text{ razy}}}$ . Wtedy
- .....  $\rho(11)$  jest liczbą pierwszą;
  - .....  $\rho(22)$  jest podzielne przez 3;
  - .....  $\rho(100)$  jest liczbą niewymierną.
17. Rozważmy dowolny  $\triangle ABC$  w kartezjańskim układzie współrzędnych, gdzie wierzchołki  $A, B, C$  mają obie współrzędne wymierne. Wtedy
- ..... pole  $\triangle ABC$  jest wymierne;
  - ..... sinusy kątów wewnętrznych  $\triangle ABC$  są wymierne;

- c) ..... tangensy kątów wewnętrznych są wymierne.
18. Czy istnieje kwadrat liczby naturalnej zakończony dokładnie 2023 cyframi
- a) ..... 0?  
b) ..... 9?  
c) ..... 4?
19. Niech  $K_1$  i  $K_2$  będą zewnętrznie rozłącznymi okręgami na płaszczyźnie o promieniach  $r_1 > r_2$  i środkach odpowiednio  $S_1, S_2$ . Poprowadźmy wspólną styczną do tych okręgów taką, że punkty  $S_1$  i  $S_2$  leżą po tej samej stronie prostej stycznej. Oznaczmy punkty styczności odpowiednio przez  $T_1$  i  $T_2$ . Wówczas na pewno zachodzi:
- a) .....  $|S_1 S_2| > |T_1 T_2|$ ;  
b) .....  $|S_1 S_2| > |S_1 T_2|$ ;  
c) .....  $|S_1 S_2| > |T_1 S_2|$ .
20. Dany jest czworościan foremny. Niech  $S_o = \mathcal{S}(O, R)$  będzie sferą opisaną na tym czworościanie, zaś  $S_w = \mathcal{S}(O', r)$  – sferą wpisaną w niego. Oznaczmy przez  $V_o, V_w$  objętości odpowiednio  $S_o$  i  $S_w$ . Wówczas
- a) .....  $O' = O$ ;  
b) .....  $R = 2r$ ;  
c) .....  $V_o = 8V_w$ .

## II. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału  $[0; 10]$  (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wykaż, że jeśli  $a \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , to

$$\left\lfloor \frac{1 + \left\lfloor \frac{1+2023a^2}{a} \right\rfloor}{a} \right\rfloor = 2023.$$

2. Niech  $\alpha, \beta, \gamma$  będą miarami kątów wewnętrznych trójkąta. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \leq 2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$