LXIII Międzyszkolne Zawody Matematyczne

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. Test

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy. Należy rozstrzygnąć prawdziwość każdego z wariantów, wpisując słowo TAK lub NIE w miejscu zaznaczonym kropkami.

Punktacja:
1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:
(1) $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
(2) $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x, czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x.

1. Liczba $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 37$
   a) TAK jest podzielna przez 2023;
   b) NIE jest podzielna przez 10^9;
   c) NIE jest większa od liczby 19^{37}.

2. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ przecinają się w punkcie E, a proste zawierające ramiona trapezu w punkcie F. Pole trójkąta $\triangle ABE$ jest równe 12, a pole trójkąta $\triangle DCE$ jest równe 3. Wówczas
   a) TAK obwód trójkąta $\triangle ABE$ jest dwa razy większy od obwodu trójkąta $\triangle DCE$;
   b) NIE obwód trójkąta $\triangle ABF$ jest cztery razy większy od obwodu trójkąta $\triangle DCF$;
   c) TAK pole trójkąta $\triangle ABF$ jest cztery razy większe od pola trójkąta $\triangle DCF$.

3. Można tak dobrać liczbę rzeczywistą m, aby układ

$$\begin{cases} |x-y| &= m \\ x+2y &= 1 \end{cases}$$

   a) TAK nie miał rozwiązań;
   b) TAK miał dokładnie jedno rozwiązanie;
   c) NIE miał nieskończenie wiele rozwiązań.

4. Dany jest ciąg $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2023}$. Wówczas
   a) NIE a_n jest ciągiem geometrycznym;
   b) TAK a_n jest ciągiem malejącym;
   c) TAK $a_{2023} < \pi$.

5. Symbol $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ oznacza sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Stwierdź prawdziwość poniższych zdań.

   a) NIE $\sum\limits_{k=1}^{2023} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} > 0$

   b) TAK $\sum\limits_{k=1}^{2022} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} + 2023 = 0$

   c) NIE $\left(\sum\limits_{k=1}^{2021} k(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^{2022} > 1$

6. Dana jest liczba naturalna n. Wtedy

   a) TAK iloczyn $(8n-2)(8n-1)8n$ jest podzielny przez 24;

   b) NIE jeśli n oraz $8n-1$ są liczbami pierwszymi to liczba $8n-3$ jest liczbą pierwszą;

   c) NIE jeśli n oraz $8n-1$ są liczbami pierwszymi to liczba $(8n)^2-(8n-1)^2$ jest podzielna przez 3.

7. Niech $p_k(X)$ oznacza liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego X, gdzie $k \leqslant n$. Istnieje taki zbiór X, że:

   a) TAK $p_3(X) = 2p_4(X)$;

   b) NIE $p_3(X) = 3p_4(X)$;

   c) NIE $2p_6(X) = p_5(X) + p_7(X)$.

8. Niech wewnątrz trójkąta równobocznego o boku długości 1 dany będzie punkt P, a x, y, z oznaczają odległości tego punktu od boków trójkąta. Wówczas

   a) TAK $x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

   b) NIE $xyz = \frac{1}{3}$;

   c) NIE $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$.

9. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$. Wówczas

   a) TAK funkcja $f(x)$ jest parzysta;

   b) TAK dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$;

   c) TAK funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$ jest nieparzysta.

10. Stosunek długości podstawy $\overline{AB}$ do długości ramienia $\overline{BC}$ trójkąta równoramiennego $\triangle ABC$ jest równy m. Oznaczmy miarę kąta $\angle ACB$ jako γ. Wtedy

    a) TAK $m \in (0,2)$;

    b) TAK $\cos(\gamma) = 1 - \frac{m^2}{2}$;

    c) NIE jeżeli $m \in (1,2)$, to trójkąt $\triangle ABC$ jest rozwartokątny.

11. Równanie $|x^2+ax+b|=1$ ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1 < x_2 < x_3$. Wtedy

    a) NIE x_3 musi być liczbą dodatnią;

    b) TAK $2x_2 - x_1 = x_3$;

    c) NIE $x_3 - x_1 = 2$.

12. Wielomian $x^{2023} - 2023x - 1$

    a) TAK ma co najmniej jeden pierwiastek niewymierny;

    b) NIE nie ma pierwiastków rzeczywistych;

    c) TAK ma dwa pierwiastki rzeczywiste tego samego znaku.

13. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona jest wzorem $f(x) = x^3 + ax + 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest pewną liczbą rzeczywistą. Wówczas

    a) NIE $f(x)$ jest funkcją nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$;

    b) NIE $f(x)$ jest funkcją rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$;

    c) NIE istnieje liczba wymierna a, dla której wielomian $f(x)$ ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.

14. Zbiór $A = \{(x, y) : \cos(x^2 + y^2) < 0,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$ jest podzbiorem płaszczyzny XOY. Wówczas

    a) NIE A jest zbiorem pustym;

    b) NIE w zbiorze A zawiera się pewien okrąg o promieniu 1;

    c) TAK w zbiorze A zawiera się pewien okrąg o promieniu 2.

15. Oznaczmy przez $\xi(n)$ liczbę złożoną z n jedynek, czyli $\xi(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ razy}}$.

    a) NIE Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to $\xi(n)$ jest liczbą pierwszą.

    b) TAK Jeżeli n jest liczbą złożoną, to $\xi(n)$ jest liczbą złożoną.

    c) TAK Liczba $\xi(27)$ jest podzielna przez 27.

16. Oznaczmy przez $\rho(n)$ liczbę $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ razy}} - \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ razy}}}$. Wtedy

    a) NIE $\rho(11)$ jest liczbą pierwszą;

    b) TAK $\rho(22)$ jest podzielne przez 3;

    c) NIE $\rho(100)$ jest liczbą niewymierną.

17. Rozważmy dowolny $\triangle ABC$ w kartezjańskim układzie współrzędnych, gdzie wierzchołki A, B, C mają obie współrzędne wymierne. Wtedy

    a) TAK pole $\triangle ABC$ jest wymierne;

    b) NIE sinusy kątów wewnętrzych $\triangle ABC$ są wymierne;

c) TAK tangensy kątów wewnętrznych są wymierne.

18. Czy istnieje kwadrat liczby naturalnej zakończony dokładnie 2023 cyframi

a) NIE 0?

b) NIE 9?

c) NIE 4?

19. Niech K_1 i K_2 będą zewnętrznie rozłącznymi okręgami na płaszczyźnie o promieniach $r_1 > r_2$ i środkach odpowiednio S_1, S_2. Poprowadźmy wspólną styczną do tych okręgów taką, że punkty S_1 i S_2 leżą po tej samej stronie prostej stycznej. Oznaczmy punkty styczności odpowiednio przez T_1 i T_2. Wówczas na pewno zachodzi:

a) TAK $|S_1S_2| > |T_1T_2|$;

b) NIE $|S_1S_2| > |S_1T_2|$;

c) NIE $|S_1S_2| > |T_1S_2|$.

20. Dany jest czworościan foremny. Niech $S_o = \mathscr{S}(O, R)$ będzie sferą opisaną na tym czworościanie, zaś $S_w = \mathscr{S}(O', r)$ – sferą wpisaną w niego. Oznaczmy przez V_o, V_w objętości odpowiednio S_o i S_w. Wówczas

a) TAK $O' = O$;

b) NIE $R = 2r$;

c) NIE $V_o = 8V_w$.

II. Zadania tekstowe

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału [0; 10] (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wykaż, że jeśli $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to
$$\left\lfloor \frac{1+\left\lfloor \frac{1+2023a^2}{a} \right\rfloor}{a} \right\rfloor = 2023.$$

Rozwiązanie:
Z założenia $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wynika, że $a^2 - a - 1 \geqslant 0$, a stąd mamy
$$a \geqslant \frac{1}{a} + 1.$$

Z definicji części całkowitej wynika, że
$$\left\lfloor \frac{1+2023a^2}{a} \right\rfloor = \frac{1}{a} + 2023a - \alpha,$$

dla pewnego $\alpha \in [0,1)$. Wówczas otrzymujemy

$$\left\lfloor \frac{1+\left\lfloor\frac{1+2023a^2}{a}\right\rfloor}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+\frac{1}{a}+2023a-\alpha}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \left(1+\frac{1}{a}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{a}+2023 \right\rfloor = 2023.$$

Prawdziwość ostatniej równości wynika stąd, że

$$\left(1+\frac{1}{a}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{a} \leqslant (a-\alpha)\cdot\frac{1}{a} = 1-\frac{\alpha}{a} < 1 \text{ oraz } \left(1+\frac{1}{a}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{a} > \frac{1}{a^2} > 0.$$

2. Niech α, β, γ będą miarami kątów wewnętrznych trójkąta. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \leqslant 2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma).$$

Rozwiązanie:
Stosując standardowe oznaczenia dostajemy

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}$$

ze wzoru na pole trójkąta oraz

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

z twierdzenia kosinusów. Stąd

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{4P}$$

Analogiczne wyrażenia otrzymujemy dla β i γ. Dalej dostajemy

$$2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma) = 2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4P}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4P}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4P}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2P} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{ab+bc+ca}{2P} = \frac{bc}{2P}+\frac{ca}{2P}+\frac{ab}{2P} = \frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}$$