

LXII MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

Czas zawodów: 180 minut. Nie wolno korzystać z urządzeń elektronicznych.

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy.

Punktacja:

1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, -1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:

(1) \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(2) $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ – liczba naturalna n taka, że a_0 to cyfra jedności liczby n , a_1 to cyfra dziesiątek liczby n itd.

1. Ciąg arytmetyczny (a_n) , którego pierwszy wyraz a_1 jest liczbą dodatnią, spełnia warunek $6a_8 = 10a_{13}$. Niech ponadto s_n oznacza sumę $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ początkowych n wyrazów tego ciągu. Wówczas

..... różnica r tego ciągu jest liczbą dodatnią;

..... $21a_{20} = a_{10}$;

..... dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $s_n \leq s_{21}$.

2. Ciąg (a_n) dany jest przez warunki początkowe $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i równość rekurencyjną $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ dla $n \geq 0$. Wówczas

..... $a_{100} = -1$;

..... $\sum_{k=0}^{100} a_k = 1$;

..... $\sum_{k=0}^{100} a_k^2 = 203$.

3. Dana jest liczba pierwsza nieparzysta p . Wówczas

..... istnieje taka liczba naturalna n , że $\sqrt{n+p} + \sqrt{n}$ jest liczbą naturalną;

..... istnieją 2022 takie liczby wymierne u , że $\sqrt{u+p} + \sqrt{u}$ jest liczbą wymierną;

..... istnieje taka liczba naturalna n , że $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ jest liczbą naturalną.

4. Punkt X leży na wysokości CC' trójkąta $\triangle ABC$. Kąty przy wierzchołkach A , B i C oznaczamy odpowiednio przez α , β i γ . Wówczas

..... $AX \perp BC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $BX \perp AC$;

..... $|\angle AXB| = \alpha + \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = H$, gdzie H jest ortocentrum $\triangle ABC$;

..... jeżeli $|CX| \operatorname{tg} \gamma = |AB|$, to $X = H$, gdzie H jest ortocentrum $\triangle ABC$.

5. Wszystkie nieujemne całkowite potęgi liczby 3 oraz ich skończone sumy zostały ułożone w ciąg w kolejności niemalejącej. Otrzymano w ten sposób ciąg $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 9$, $a_5 = 10$, $a_6 = 12$, $a_7 = 13$, $a_8 = 27$, Wówczas

- ciąg ten jest rosnący;
..... w ciągu tym występuje liczba 2022;
..... $a_{2022} = 88461$.
6. Dana jest liczba 187. Wówczas
- liczba 187 jest liczbą pierwszą;
..... istnieje 6 liczb naturalnych dla których 187 jest największym dzielnikiem właściwym (dzielnik właściwy liczby to dzielnik liczby, mniejszy od niej samej);
..... istnieją co najmniej 52 liczby naturalne mniejsze od 10^4 , dla których 187 jest dzielnikiem właściwym.
7. Najkrótszy oraz najdłuższy bok pewnego trójkąta mają odpowiednio długości 1 i 3. Wówczas
- pole tego trójkąta może być każdą liczbą z przedziału $(0; \frac{3}{2})$;
..... maksymalny możliwy promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $\frac{3\sqrt{13}}{49}$;
..... maksymalny możliwy promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest mniejszy niż 2022.
8. Niech \mathcal{F} będzie zbiorem wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających warunek $f(x) = f(x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wówczas
- zbiór \mathcal{F} zawiera wielomian stopnia większego od 1;
..... zbiór \mathcal{F} zawiera tylko funkcje nierosnące lub niemalejące;
..... zbiór \mathcal{F} zawiera pewną funkcję o trzech wartościach.
9. Liczbę naturalną $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ nazywamy palindromem, gdy $n = \overline{a_0 a_1 \dots a_{k-1} a_k}$. Dla przykładu palindromami są liczby 7, 33, 494. Wówczas
- jeśli kwadrat liczby $n > 1$ jest palindromem, to $11|n$;
..... istnieją liczby pierwsze > 20 , które są palindromami;
..... istnieje nieskończenie wiele sześciątów (liczb naturalnych), które są palindromami.
10. Niech A będzie zbiorem takich punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o obu współrzędnych dodatnich, że z odcinków o długościach $x, y, 1$ można zbudować trójkąt, a z odcinków o długościach $x, y, 2$ nie można zbudować trójkąta. Wówczas
- istnieją dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do A ;
..... zbiór A jest figurą geometryczną o polu 1;
..... zbiór A ma środek symetrii.

11. Oznaczmy przez $J(b, k)$ liczbę $1 + b + \dots + b^{k-1}$, gdzie $k, b \in \mathbb{N}$. Wówczas
- istnieje nieskończenie wiele $k > 1$ takich, że $J(10, k)$ jest kwadratem liczby naturalnej;
 - istnieje nieskończenie wiele takich b , że liczba $J(b, 3)$ jest kwadratem liczby naturalnej;
 - jeśli b jest liczbą parzystą i $J(b, k)$ jest kwadratem liczby naturalnej, to $8|b$.
12. Dla liczby naturalnej $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ niech $f(n)$ oznacza liczbę $\overline{a_{k-1} \dots a_1 a_0 a_k} + 1$. Dla przykładu: $f(4) = 5$, $f(24) = 43$, $f(807) = 79$. Dalej niech $u_1 \in \mathbb{N}$ i $u_{n+1} = f(u_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas niezależnie od wyboru u_1
- ciąg (u_n) jest okresowy;
 - ciąg (u_n) jest ograniczony;
 - $\text{NWD}(u_n, u_{n+1}) \leq 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
13. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, przy czym wyróżnik funkcji f jest dodatni, a miejsca zerowe funkcji g są kwadratami miejsc zerowych funkcji f . Wówczas
- wierzchołek paraboli wyznaczonej przez funkcję g ma dodatnią odcięta;
 - $d = b^2$;
 - $c < a$.
14. W ostrosłupie $ABCD$ kąty $\angle BAD$, $\angle CAD$, $\angle BAC$ są proste. Wówczas
- $P_{BCD}^2 = P_{ACD}^2 + P_{ABD}^2 + P_{ABC}^2$;
 - środek kuli opisanej na $ABCD$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD ;
 - $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD| = h \cdot P_{BCD}$, gdzie h to wysokość ostrosłupa wychodząca z wierzchołka A .
15. Liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ustawiamy losowo w ciąg. Rozważmy zdarzenia: A – suma czterech początkowych wyrazów otrzymanego ciągu jest mniejsza od sumy czterech pozostałych, B – suma czterech początkowych wyrazów otrzymanego ciągu jest większa od czterech pozostałych. Wobec tego
- $P(A) = P(B)$;
 - $P(A) = \frac{1}{2}$;
 - $P(A) < \frac{1}{2}$.
16. Niech T będzie zbiorem wszystkich trapezów równoramiennych, których przekątne tworzą z podstawami kąt α i mają długość d . Wynika stąd, że
- obwody wszystkich trapezów należących do zbioru T są równe;
 - pola wszystkich trapezów należących do zbioru T są równe;

- suma podstaw każdego trapezu należącego do zbioru T jest równa $2d \cos \alpha$.
17. Istnieje taka liczba rzeczywista m , że zbiór rozwiązań nierówności $|x| + m < \frac{1}{|x|}$
- jest zbiorem pustym;
 jest równy $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 jest zawarty w przedziale $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.
18. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: czerwony lub niebieski. Wówczas niezależnie od pokolorowania
- istnieją dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1;
 istnieją trzy punkty tego samego koloru będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego.
 istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru;
19. Ze zbioru liczb $1, 2, \dots, 2022$ wybieramy 1012 liczb. Wówczas
- różnica pewnych dwóch z nich wynosi 1;
 pewne dwie z nich są względnie pierwsze;
 są takie dwie, że jedna dzieli się przez drugą.
20. Jeśli $\sin x - \cos x = p$ to
- $\sin 2x = 1 - p^2$;
 $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1+2p-p^4}{2}$;
 $\sin^4 x - \cos^4 x = p\sqrt{2-p^2}$.

II. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \quad |AE| = |EB| = |BD|, \quad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

2. W szkolnym turnieju szachowym występuje dwójka uczestników z klasy pierwszej oraz pewna ilość uczestników z klasy drugiej. Wszyscy gracze odbyli dokładnie jeden pojedynek ze wszystkimi pozostałymi uczestnikami turnieju. Wiadomo, że dwaj pierwszoklasiści łącznie zdobyli 8 punktów, a każdy z drugoklasistów uzyskał taką samą ilość punktów. Ilu drugoklasistów uczestniczyło w turnieju? (za wygraną jest przyznawany 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$ punktu, a za przegraną 0 punktów).