

LXI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

I. TEST

W każdym zadaniu testowym podano założenia oraz trzy (niekoniecznie wykluczające się) warianty tezy.

Punktacja:

1 punkt za każdą poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi, –1 punkt za odpowiedź niepoprawną i 1 punkt dodatkowy za trzy poprawne odpowiedzi w jednym zadaniu.

Oznaczenia:

- (1) \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że 0 nie jest liczbą naturalną, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
(2) $\lfloor x \rfloor$ – część całkowita liczby rzeczywistej (podłoga) x , czyli największa liczba całkowita mniejsza bądź równa x .

1. Liczba $2018^{2019^{2020}}$

- ma co najmniej 3 dzielniki pierwsze,
- ma w zapisie dziesiętnym cyfrę jedności 2,
- ma w rozkładzie na czynniki pierwsze co najmniej 10^{666} dwójek.

2. Niech $p(n)$ oznacza iloczyn cyfr liczby naturalnej n .

- $45 \mid (p(1) + p(2) + \dots + p(2020))$,
- $p(1) + p(2) + \dots + p(10^n)$ jest ciągiem geometrycznym,
- $p(1) + p(2) + \dots + p(10^n) \leq 46^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

3. Istnieje funkcja ciągła $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

- mająca nieskończenie wiele maksimów lokalnych,
- mająca zbiór wartości $[0, +\infty)$,
- przyjmująca nieskończenie wiele razy co najmniej trzy wartości.

4. Kwadrat można podzielić na n kwadratów, gdzie

- n jest dowolną potęgą o wykładniku naturalnym liczby 4,
- n jest dowolną liczbą parzystą większą niż 5,
- n jest dowolną liczbą nieparzystą większą niż 5.

5. Wewnątrz kwadratu o boku 20 rozmieszczono n punktów w taki sposób, że odległość dowolnych dwóch punktów jest większa niż 3. Możliwe jest, że

- $n = 50$,
- $n = 59$,
- $n = 75$.

6. Niech $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2$, $x > 0$.
- Zbiór wartości funkcji f składa się tylko z liczb całkowitych i jest skończony.
 - $f(x) \leq \sqrt{3} \cdot x$.
 - w każdym przedziale $[n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$) funkcja ma co najwyżej $2n+1$ wartości.
7. Sześcian $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną prostopadłą do głównej przekątnej \overline{AG} . Niech $P(t)$ oznacza pole otrzymanego przekroju zawierającego punkt $X(t) = A + t \cdot \overrightarrow{AG}$, $t \in [0, 1]$, a $R(t)$ promień okręgu opisanego na tym przekroju.
- Wykresem funkcji $P(t)$ jest łamana.
 - Funkcja $R(t)$ jest rosnąca dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$.
 - Wykresem funkcji $R(t)$ jest łamana.
8. Niech W i Q będą niestałymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Przez $\deg W$ oznaczamy stopień wielomianu W .
- $2 | (\deg W + \deg Q) \implies \deg(W \cdot Q) = \deg W + \deg Q$
 - $2 | \deg W$ i $3 | \deg Q \implies 6 | \deg(W \cdot Q)$
 - $3 | \deg W$ i $3 | \deg Q \implies 3 | \deg(W + Q)$
9. Niech W będzie wielomianem stopnia $2n > 10$, $n \in \mathbb{N}$. Przez W' oznaczamy pochodną wielomianu W .
- Wielomian W osiąga każdą wartość rzeczywistą nie więcej niż $2n$ razy.
 - Jeśli x_0 jest wielokrotnym pierwiastkiem W , to jest także pierwiastkiem W' .
 - Istnieje nieskończenie wiele wartości, które wielomian W osiąga dokładnie dwa razy.
10. Liczba $\sqrt{1 + 2020\sqrt{1 + 2019\sqrt{1 + 2018\sqrt{1 + 2017 \cdot 2015}}}}$
- jest liczbą niewymierną,
 - jest > 2020 ,
 - jest < 2021 .
11. W trójkącie $\triangle ABC$ zachodzą równości $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ i $|AB| = 2$. Czworokąt $KLMN$ spełnia warunki $L \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$, $N \in \overline{CA}$ i $K \in \overline{AB}$. Wówczas
- czworokąt $KLMN$ może być kwadratem,
 - pole czworokąta $KLMN$ może być większe niż 1,
 - jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to $|KM| = \frac{1}{13}(8\sqrt{6} - 6\sqrt{2})$.

12. Dane są liczby $A = \frac{2020!}{202! \cdot 201! \cdot 200!}$ i $B = \frac{2020!}{202! + 201! + 200!}$. Wówczas
- liczba A jest liczbą całkowitą,
 - liczba B jest liczbą całkowitą,
 - iloraz $\frac{B}{A}$ jest liczbą całkowitą.
13. Liczbę rzeczywistą x nazwiemy *dobrą*, gdy liczby $\frac{x+2}{x+1}$ i $\frac{x+3}{x+2}$ są liczbami całkowitymi. Wówczas
- zbiór liczb *dobrych* jest niepusty,
 - istnieje co najmniej jedna niewymierna liczba *dobra*,
 - istnieją dokładnie dwie liczby *dobre*.
14. Równanie
- $\sin x = \operatorname{ctg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych,
 - $\cos x = \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych,
 - $\sin x + \cos x = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych.
15. Dla danego zbioru skończonego X , przez $L_k(X)$ oznaczamy liczbę jego podzbiorów k -elementowych. Wówczas
- nie istnieje taki zbiór X , dla którego $L_5(X) > L_6(X)$,
 - jeżeli $L_5(X) > L_6(X)$, to w zbiorze X istnieje podzbiór 10-elementowy,
 - jeżeli $L_5(X) > L_6(X)$, to istnieje taki podzbiór $Y \subseteq X$, że $L_5(Y) < L_4(Y)$.
16. Nieskończony ciąg liczbowy (a_1, a_2, a_3, \dots) nazywa się *ciągami wypukłym*, gdy dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $2a_{k+1} \leq a_k + a_{k+2}$. Wówczas
- ciąg (h_n) dany przez $h_n = \frac{1}{n}$ jest *ciągami wypukłym*,
 - każdy ciąg arytmetyczny jest *ciągami wypukłym*,
 - jeżeli ciąg (a_n) jest *ciągami wypukłym*, to ciąg (b_n) dany przez $b_n = a_n^2$ również jest *ciągami wypukłym*.
17. Czy istnieje
- ciąg arytmetyczny sześciowyrazowy, w którym wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?
 - ciąg arytmetyczny trzywyrazowy postaci $p, p + 2^k, p + 2^{k+1}$, gdzie $p > 3, k \in \mathbb{N}$ i wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?
 - ciąg arytmetyczny trzywyrazowy postaci n^2, m^2, k^2 , gdzie $n, m, k \in \mathbb{N}$, w których wyrazy są parami względnie pierwsze?

18. Czy istnieje liczba naturalna
- dwucyfrowa, która jest równa sumie kwadratów swoich cyfr?
 - trzycyfrowa, która jest równa sumie sześciąt swoich cyfr?
 - czterocyfrowa, która jest równa sumie czwartych potęg swoich cyfr?
19. Czy istnieje niestały wielomian P o współczynnikach rzeczywistych taki, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$
- $P(0) = 0$ i $P(x + 1) = P(x) + x$?
 - $P(x + 1) = P(x)$?
 - $P(2x) = 2P(x)$?
20. Rzucamy wielokrotnie dwiema sześciennymi kostkami do gry. W każdym rzucie sumujemy liczbę oczek na obu kostkach.
- Prawdopodobieństwo, że w każdym z pięciu początkowych rzutów wypadnie suma 7 jest mniejsze od $\frac{1}{2021}$.
 - Prawdopodobieństwo, że w pięciu początkowych rzutach suma oczek podzielnych przez 3 wypadnie co najmniej cztery razy jest mniejsza od $\frac{1}{22}$.
 - Prawdopodobieństwo, że suma 8 wypadnie przed sumą 7 jest większe od $\frac{1}{2}$.

II. ZADANIA TEKSTOWE

Rozwiązania zadań tekstowych należy zapisać na osobnych kartkach. Za każde zadanie tekstowe można zdobyć punkty z przedziału $[0; 10]$ (ocenia się poprawność rozwiązania, ale również prawidłowość prezentacji).

1. Wykaż, że każdy wielomian nieujemny (tzn. taki, że $W(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$) o współczynnikach rzeczywistych da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów wielomianów rzeczywistych.
2. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Niech \overline{AD} będzie średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta $\triangle ABC$. Wykazać, że prosta l_{BC} dzieli odcinek \overline{HD} na dwie równe części.