

O D P O W I E D Z I

1. Istnieją takie różne liczby naturalne $a, b \geq 2$, że

TAK $\text{NWW}(a, b) + \text{NWD}(a, b)$ jest nieparzystą liczbą pierwszą,

NIE $\text{NWW}(a, b) - \text{NWD}(a, b) = 1$,

TAK $\text{NWW}(a, b) - \text{NWD}(a, b) = 2017$.

2. Istnieją takie liczby pierwsze $p \leq q \leq r$, że

TAK liczba $p + q + r$ jest liczbą pierwszą,

NIE liczby $p + q$, $q + r$, $r + p$ są liczbami pierwszymi,

TAK liczba $2^{-7}(p + q + r)$ jest liczbą naturalną.

3. Liczby naturalne m, n są takie, że $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ jest liczbą naturalną oraz zachodzą nierówności $2017 \leq m < n$. Wówczas

TAK liczba \sqrt{mn} jest parzystą liczbą naturalną,

TAK zachodzi nierówność $n - m \geq 90$,

NIE obie liczby m, n są kwadratami liczb całkowitych.

Powinno być:

NIE,

TAK,

TAK

4. Dane są liczby $a > 1, b > 1$ i $c > 1$. Wówczas

TAK $(\log_a b) \cdot (\log_b c) \cdot (\log_c a) = \log_{abc} abc$,

TAK $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$,

NIE $a^b \cdot b^c \cdot c^a = 10^{a \lg b + b \lg c + c \lg a}$, gdzie $\lg x = \log_{10} x$.

5. Liczby rzeczywiste x, y są takie, że $2y \sin x = y^2 + 1$ oraz $|x| \leq 2$. Wówczas

TAK... $\sin 2x = 0$,

TAK... $\cos 2y < 0$,

TAK... pole koła o promieniu 1 jest równe $2xy$.

6. Ciąg (c_n) jest takim ciągiem geometrycznym, że wyrazy $c_1, c_2, \dots, c_{2017}$ są liczbami naturalnymi, a c_{2018} nie jest liczbą całkowitą. Wówczas

NIE... ciąg $(\log_{10} c_n)$ jest ciągiem malejącym,

TAK... wszystkie wyrazy ciągu (c_n) są liczbami wymiernymi,

TAK... $c_1 \geq 2^{2016}$.

7. Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 2017$ i różnicy $r \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez d_n sumę cyfr (dziesiętnych) liczby a_n . Wówczas

NIE ciąg (d_n) jest ciągiem rosnącym,

NIE ciąg (d_n) może być ciągiem arytmetycznym,

TAK istnieje taka liczba $s \in \mathbb{N}$, że zbiór $\{n \in \mathbb{N} : d_n = s\}$ jest zbiorem nieskończonym.

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$. Wówczas

TAK funkcja f jest funkcją okresową,

NIE funkcja g dana wzorem $g(x) = f(x)^2$ jest funkcją parzystą,

NIE równanie $f(x) = ax^2$ ma rozwiązania dla każdego parametru $a \in \mathbb{R}$.

9. Rozważmy funkcję $f : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Niech $g(x) = ax^2 + bx + c$ oznacza trójmian kwadratowy. Wówczas

NIE istnieją takie a, b, c , że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $f(x) < g(x)$,

TAK jeżeli dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $g(x) < f(x)$, to $a < 1/10$,

TAK istnieją takie a, b, c , że równanie $f(x) = g(x)$ ma trzy rozwiązania dodatnie.

10. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \lfloor 2^x \rfloor - 2^{\lfloor x \rfloor}$, gdzie $\lfloor \alpha \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej α . Wówczas

NIE funkcja f jest funkcją okresową,

NIE funkcja f jest funkcją ciągłą,

NIE $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą.

11. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor x^2$. Wówczas

TAK funkcja f jest funkcją monotoniczną niemalejącą,

NIE funkcja f jest funkcją nieparzystą,

TAK istnieją takie $a, b > 0$, że równanie $f(x) = ax + b$ ma trzy rozwiązania.

12. Dane są takie funkcje ciągłe⁴ $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, że zachodzi równość:

$$\min\{f(x) + g(x) : x \in [0; 1]\} = \min\{f(x) : x \in [0; 1]\} + \min\{g(x) : x \in [0; 1]\}.$$

Wówczas

NIE $\max\{f(x) - g(x) : x \in [0; 1]\} = \max\{f(x) : x \in [0; 1]\} - \min\{g(x) : x \in [0; 1]\}$,

TAK $\max\{f(x) + g(x) : x \in [0; 1]\} \leq \max\{f(x) : x \in [0; 1]\} + \max\{g(x) : x \in [0; 1]\}$,

NIE $\min\{f(x) \cdot g(x) : x \in [0; 1]\} = \min\{f(x) : x \in [0; 1]\} \cdot \min\{g(x) : x \in [0; 1]\}$.

13. Dany jest układ nierówności

$$(\mathcal{U}) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \geq 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \geq 0, \end{cases}$$

gdzie $a_1^2 + b_1^2 > 0$ i $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Wówczas

TAK układ (\mathcal{U}) może nie mieć rozwiązań,

TAK jeżeli układ (\mathcal{U}) ma (co najmniej jedno) rozwiązanie, to ma ich nieskończenie wiele,

⁴Ciągłość funkcji f i g implikuje istnienie występujących niżej maksimów i minimów!

NIE jeżeli układ (\mathcal{U}) ma rozwiązania (rzeczywiste), to ma też rozwiązania wymierne⁵.

14. Trójkąt \mathcal{T} ma wierzchołki w punktach $A = (1, 1)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-1, 10)$. Wówczas

NIE trójkąt \mathcal{T} jest trójkątem ostrokątnym,

TAK pole $S(\mathcal{T})$ trójkąta \mathcal{T} jest równe 17,

NIE promień r okręgu wpisanego w trójkąt \mathcal{T} spełnia równość $(3 + \sqrt{5})r = 16$.

15. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest rozłączna ze zbiorem $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 2y\}$. Wówczas

NIE $b > 1$,

NIE $a > 1$,

TAK $b^2 \geq a^2 + 2b$.

16. Dany jest odcinek \overline{AB} . Dla dowolnego punktu C leżącego poza prostą AB przez C' , C_1 , F oznaczamy takie punkty prostej AB , że $\overline{CC'}$ jest wysokością, $\overline{CC_1}$ jest środkową i \overline{CF} jest dwusieczną kąta $\sphericalangle C$ w trójkącie $\triangle ABC$. Wówczas

NIE istnieje taki punkt C , że $C' \neq C_1$ i punkt C' jest środkiem odcinka $\overline{C_1F}$,

TAK istnieje taki punkt C , że $|C'F| > \frac{1}{2}|AB|$,

NIE jeżeli $C' \neq C_1$ i punkt F jest środkiem odcinka $\overline{C'C_1}$, to $m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ$.

17. Trójkąty \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 są prostokątne, oba mają przeciwprostokątne długości 2017 i promienie okręgów wpisanych równe 1. Wówczas

TAK trójkąty \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 mają równe pola,

TAK suma długości przyprostokątnych w każdym z tych trójkątów wynosi 2019,

TAK trójkąty \mathcal{T}_1 i \mathcal{T}_2 są przystające.

18. Dany jest czworościan foremny $ABCD$, gdzie $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ (współrzędne w kartezjańskim prostokątnym układzie współrzędnych). Wówczas

NIE wierzchołek D ma współrzędne $(0, 0, 0)$

TAK objętość czworościanu $ABCD$ wynosi $\frac{1}{3}$,

NIE promień sfery wpisanej wynosi $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. Przekrój sześcianu płaszczyzną może być

TAK trójkątem równobocznym,

NIE trójkątem prostokątnym,

TAK trapezem nierównoramiennym.

⁵Para (x, y) jest *rozwiązaniem wymiernym*, gdy jest rozwiązaniem (układu) i obie liczby x, y są liczbami wymiernymi

20. Dany jest sześcian jednostkowy \mathcal{S} . Zbiór \mathcal{A} składa się ze wszystkich wierzchołków sześcianu \mathcal{S} , środków wszystkich krawędzi sześcianu \mathcal{S} , środków wszystkich ścian sześcianu \mathcal{S} i środka sześcianu \mathcal{S} . Wówczas

TAK liczba $|\mathcal{A}| + 1$ jest liczbą doskonałą⁶,

TAK istnieją punkty zbioru \mathcal{A} , których odległość wynosi $1/2$,

NIE istnieje 50 podzbiorów zbioru \mathcal{A} składających się z trzech punktów współliniowych.

⁶Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, gdy suma jej wszystkich dzielników naturalnych jest równa $2n$. Symbolem $|\mathcal{X}|$ oznaczamy liczbę elementów (skończonego) zbioru \mathcal{X} .