

# LI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

13. 03. 2010

## 1. TEST

1. Boki pewnego trójkąta mają długości będące naturalnymi potęgami liczby 2. Wówczas ten trójkąt

**TAK** jest równoramienny

**NIE** jest równoboczny

**NIE** może być rozwartokątny

2. Okrąg  $\mathcal{K}$  o promieniu 1 "objeżdża" jednokrotnie, tocząc się bez poślizgu, od zewnątrz nieruchomy okrąg o promieniu 4. Wówczas

**NIE** środek okręgu  $\mathcal{K}$  przebywa drogę długości  $12\pi$

**NIE** ustalona średnica okręgu  $\mathcal{K}$  wykonuje dokładnie 4 pełne obroty

**TAK** ustalony punkt okręgu  $\mathcal{K}$  przebywa drogę dłuższą niż  $8\pi$

3. Ciąg  $(a_n)$  dany jest przez  $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2010}$ , dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Wówczas

**NIE**  $(a_n)$  jest ciągiem rosnącym

**NIE**  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym

**NIE**  $a_{2010} > 3$

4. Trzyelementowemu zbiorowi  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  liczb rzeczywistych przyporządkujemy liczbę

$$l(A) = \lfloor a_1 \rfloor + \lfloor a_2 \rfloor + \lfloor a_3 \rfloor + \lfloor -a_1 \rfloor + \lfloor -a_2 \rfloor + \lfloor -a_3 \rfloor.$$

Wówczas

**TAK**  $l(A)$  jest liczbą niedodatnią

**NIE**  $l(A)$  jest liczbą całkowitą nieparzystą

**TAK** jeżeli  $a_1 + a_2 + a_3 = 2010$ , to  $l(A) \neq -1$

5. Dany jest wielomian  $F(X) = (X^{2010} - 2X^{1005} + 1)^4$ . Wówczas, reszta, jaką daje ten wielomian przy dzieleniu przez dwumian

**NIE**  $X + 2010$ , jest liczbą całkowitą parzystą

**TAK**  $X + 1$ , jest równa 256

**NIE**  $X^2 + 1$ , jest wielomianem  $16X + 16$

6. W czworokącie wypukłym  $ABCD$  punkt  $S$  jest punktem przecięcia przekątnych  $\overline{AC}$  i  $\overline{BD}$ . Załóżmy, że pola trójkątów  $\triangle ABS$  i  $\triangle CDS$  są równe. Wówczas

**NIE** czworokąt  $ABCD$  jest prostokątem

**TAK**  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

**NIE** czworokąt  $ABCD$  jest trapezem równoramiennym

7. Niech, dla danej liczby  $a \in \mathbb{R}$ , symbol  $Z(a)$  oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych rozwiązań równania  $2^{\sin x} = ax$ . Wówczas

**TAK** jeżeli  $a \neq 0$ , to zbiór  $Z(a)$  jest niepusty

**TAK** istnieją takie liczby  $a \in \mathbb{R}$ , dla których zbiór  $Z(a)$  ma więcej niż 2010 elementów

**NIE**  $Z(-1/2)$  jest zbiorem dwuelementowym

8. Ciąg  $(a_n)$  o wyrazach będących liczbami dodatnimi nazywa się **ciągami harmonicznymi**, gdy każdy (oprócz pierwszego) jego wyraz jest średnią harmoniczną wyrazów poprzedniego i następnego. Wówczas,

**TAK** ciąg  $(h_n)$  dany przez  $h_n = \frac{1}{n}$  jest ciągiem harmonicznym

**TAK** jeżeli ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  są harmoniczne, to ciąg  $\left(\frac{a_n b_n}{a_n + b_n}\right)$  jest harmoniczny

**TAK** jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem harmonicznym, to  $\left(2^{\frac{1}{a_n}}\right)$  jest ciągiem geometrycznym

9. Niech  $O_X$  oznacza przekształcenie płaszczyzny polegające na obrocie wokół punktu  $X$  o kąt  $30^\circ$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Niech  $A \neq B$  będą dwoma punktami płaszczyzny. Wówczas

**NIE** złożenie  $O_A \circ O_B$  jest obrotem wokół środka odcinka  $\overline{AB}$

**TAK** złożenie  $O_A \circ O_B$  jest złożeniem pewnej ilości symetrii osiowych

**NIE**  $O_A \circ O_B = O_B \circ O_A$

10. Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ . Wówczas

**TAK** równanie  $f(x) = 7$  ma więcej niż cztery rozwiązania rzeczywiste

**NIE** równanie  $f(x) = 2010$  ma dokładnie dwa rozwiązania całkowite

**NIE** funkcja  $f$  jest funkcją rosnącą

11. Rozważmy zbiór  $\mathcal{R}$  wszystkich pięciowyrazowych ciągów o wyrazach będących liczbami całkowitymi z przedziału  $[0, 9]$ . Wówczas podzbiór zbioru  $\mathcal{R}$  składający się ze wszystkich

**TAK** ciągów (ściśle) rosnących ma  $\binom{10}{5}$  elementów

**TAK** ciągów nierosnących ma  $\binom{14}{5}$  elementów

**NIE** ciągów niemalejących ma 252 elementy

12. Różne proste  $k$  i  $l$  są osiami symetrii płaskiej figury  $\mathcal{F}$ . Wówczas
- NIE** jeżeli  $k \perp l$ , to  $\mathcal{F}$  jest kołem
  - TAK** jeżeli  $k \parallel l$ , to  $\mathcal{F}$  ma jeszcze co najmniej jedną oś symetrii
  - NIE** jeżeli osie  $k$  i  $l$  przecinają się pod kątem o mierze  $36^\circ$ , to  $\mathcal{F}$  ma jeszcze co najmniej osiem innych osi symetrii
13. Dany jest trójkąt prostokątny  $\triangle ABC$ . Dwusieczna kąta prostego  $\sphericalangle C$  dzieli przeciwprostokątną na odcinki  $\overline{AF}$  o długości 2 i  $\overline{BF}$  o długości 3. Wówczas
- TAK** spodek  $C'$  wysokości  $\overline{CC'}$  dzieli bok  $\overline{AB}$  w proporcji  $|AC'| : |C'B| = 4 : 9$
  - NIE** pole trójkąta  $\triangle ABC$  wynosi 6
  - NIE**  $\sin |\sphericalangle A| = \frac{2}{\sqrt{3}}$
14. Liczba  $123!$  (sto dwadzieścia trzy silnia) jest podzielna przez
- TAK**  $57^6$
  - TAK**  $11^{12}$
  - NIE**  $2^{118}$
15. Zbiór liczb rzeczywistych  $x$  spełniających nierówność  $||x| - 1| \leq 2009$
- NIE** jest zbiorem pustym
  - NIE** zawiera dokładnie 4019 liczb całkowitych
  - NIE** jest podzbiorem zbioru  $\{x : |x - 1| \leq 2010\}$
16. Równanie  $x^3 + 2x^2 + x + a = 0$  ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Wobec tego
- NIE**  $a < 0$
  - TAK**  $a < \frac{4}{27}$
  - TAK** najmniejszy z tych pierwiastków jest mniejszy niż  $-1$
17. Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem  $f(x) = x^5 + 16|x|$ . Wówczas
- NIE** funkcja ta jest funkcją rosnącą
  - NIE** funkcja ta ma dokładnie trzy miejsca zerowe
  - TAK** funkcja ta ma dokładnie dwa miejsca zerowe
18. Dla kątów  $\alpha, \beta, \gamma$  pewnego trójkąta zachodzi związek  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$ . Wówczas
- TAK** ten trójkąt jest trójkątem rozwartokątnym
  - NIE** środek okręgu opisanego na tym trójkącie leży we wnętrzu tego trójkąta
  - NIE** taki trójkąt nie istnieje

19. Trójmian kwadratowy  $X^2 + 2010X - 1005^2$

**NIE** ma dwa różne pierwiastki będące liczbami wymiernymi

**NIE** nie ma pierwiastków rzeczywistych

**TAK** ma takie pierwiastki rzeczywiste  $\alpha, \beta$ , że  $\alpha^2 + \beta^2$  jest liczbą całkowitą podzielną przez 75

20. Wielościan  $\mathcal{U}$  zawarty jest w wielościanie  $\mathcal{W}$ . Wówczas

**TAK** objętość wielościanu  $\mathcal{U}$  jest nie większa niż objętość wielościanu  $\mathcal{W}$

**NIE** pole powierzchni wielościanu  $\mathcal{U}$  jest nie większe niż pole powierzchni wielościanu  $\mathcal{W}$

**NIE** sumaryczna długość krawędzi wielościanu  $\mathcal{U}$  jest nie większa od sumarycznej długości krawędzi wielościanu  $\mathcal{W}$