

XLIX MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

08.03.2008

1. TEST

1. Dokładnie pięć wierzchołków sześcianu S pomalowano na czerwono. Wówczas

- NIE** istnieje ściana, której wszystkie wierzchołki są pomalowane na czerwono
- TAK** istnieje ściana, której dokładnie 3 wierzchołki są pomalowane na czerwono
- NIE** istnieje łamana o długości 4, do której należą wszystkie czerwone wierzchołki sześcianu

2. Danych jest 12 różnych liczb naturalnych większych niż 13. Suma każdych trzech z tych liczb jest podzielna przez 5. Wówczas

- TAK** każda z tych liczb jest podzielna przez 5
- TAK** ilość tych spośród tych liczb, które są niepodzielne przez 5 jest podzielna przez 3
- NIE** suma wszystkich tych liczb jest większa niż 2^9

3. Niech dla danej liczby rzeczywistej x symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza *podłogę* liczby x , a symbol $\lceil x \rceil$ oznacza *sufit* liczby x . Wówczas, dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$

- NIE** $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$
- TAK** $\lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$
- TAK** $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

4. Danych jest 2008 różnych punktów na płaszczyźnie. Wówczas

- TAK** istnieje koło zawierające dokładnie dwa z tych punktów
- TAK** istnieje koło zawierające dokładnie 2007 z tych punktów
- TAK** jeżeli żadne trzy z tych punktów nie leżą na jednej prostej, to istnieje koło zawierające dokładnie 121 z tych punktów

5. Pole trójkąta $\triangle ABC$ o bokach długości a, b, c równe jest iloczynowi $2abc$. Wówczas

- NIE** taki trójkąt nie istnieje
- TAK** promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt spełnia $r \leq 1$
- NIE** jeżeli $\triangle A'B'C'$ ma pole równe $2a'b'c'$, to trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ są przystające

6. Istnieje czworościan, którego

TAK dokładnie dwie ściany są trójkątami prostokątnymi

TAK wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi

TAK wszystkie ściany są trójkątami rozwartokątnymi

7. Łamaną $A_1A_2 \dots A_k$ w przestrzeni nazwiemy *ortonormalną*, gdy każdy z odcinków ją tworzących ma długość 1 i kąty $\sphericalangle A_1A_2A_3, \sphericalangle A_2A_3A_4, \dots, \sphericalangle A_{k-2}A_{k-1}A_k$ są proste. Wówczas

NIE jeżeli $A_1A_2A_3A_4A_5$ jest łamaną ortonormalną, to $|A_1A_5| = \sqrt{6}$

TAK jeżeli $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jest łamaną ortonormalną, to A_1 może pokrywać się z A_6

TAK jeżeli w łamanej ortonormalnej $A_1A_2A_3A_4A_5$ zachodzi $A_1 = A_5$, to punkty A_1, A_2, A_3, A_4 leżą w jednej płaszczyźnie

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona jest przez

$$f(x) = \max \left(x, \frac{1}{x} \right)$$

dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Wówczas

NIE f jest funkcją nieparzystą

TAK równanie $2008f(x) = -1$ ma dokładnie dwa rozwiązania

TAK nierówność $x \leq f(x)$ spełniona jest przez wszystkie liczby rzeczywiste x

9. Zbiór punktów płaszczyzny opisany w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych układem równań

$$\begin{cases} |x| + |x - 2| = 2y \\ |x - 1| + |x - 3| = 2y \end{cases}$$

jest

NIE zbiorem pustym

NIE łamaną o długości 3

TAK odcinkiem o końcach $(1, 1)$ i $(2, 1)$

10. Niech p oznacza liczbę pierwszą. Wówczas

TAK $p + 117$ nie jest liczbą pierwszą

TAK $p^2 + 5p - 6$ nie jest liczbą pierwszą

NIE $8^p + 1$ może być liczbą pierwszą

11. Reszta z dzielenia wielomianu $X^{28} + X^3 + 1$ przez wielomian $X^3 - X$ jest

TAK wielomianem stopnia 2

TAK wielomianem, który nie ma pierwiastków rzeczywistych

NIE wielomianem będącym funkcją parzystą

12. Liczby p, q, r są liczbami pierwszymi, a trójkąt T o bokach długości $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ jest trójkątem prostokątnym. Wówczas

TAK pqr jest liczbą parzystą

NIE $\max(p, q, r) \leq 61$

NIE kwadrat pola trójkąta T jest większy niż 2

13. Dwsieczne (czterech) kątów czworokąta wypukłego

NIE mają punkt wspólny

NIE mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe

TAK mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe

14. Czworoscian C_1 ma wierzchołki A_1, B_1, C_1, D_1 będące środkami ciężkości (odpowiednio) ścian $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ i $\triangle ABC$ czworoscianu C o wierzchołkach A, B, C, D . Wówczas stosunek

NIE objętości C do objętości C_1 wynosi 9

NIE pola powierzchni C do pola powierzchni C_1 wynosi 6

TAK sumy długości krawędzi C do sumy długości krawędzi C_1 wynosi 3

15. Prosta k przechodzi przez punkt A o prostokątnych współrzędnych $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ i przez pewien punkt kratowy B (czyli punkt o obu współrzędnych całkowitych). Wówczas

TAK prosta k przechodzi przez różny od B punkt kratowy

NIE prosta k może tworzyć z osią odciętych kąt o mierze 30 stopni

NIE jeżeli prosta k przechodzi przez punkt kratowy C różny od B , to $|BC| \geq 5$

16. W sześciacie o krawędzi 2 można

NIE zmieścić koło o promieniu $\frac{5}{2}$

TAK zmieścić koło o promieniu $\sqrt{\frac{3}{2}}$

TAK zmieścić kwadrat o boku dłuższym niż 2

17. Dane są dwa ciągi geometryczne (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich. Wówczas

NIE ciąg (c_n) dany przez $c_n = \max(a_n, b_n)$ jest ciągiem geometrycznym

TAK ciąg (d_n) dany przez $d_n = a_n b_n$ może być ciągiem arytmetycznym

TAK istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że ciąg (e_n) dany przez $e_n = \min(a_{k+n}, b_{k+n})$ jest ciągiem geometrycznym

18. Równanie $\sin(x + m) = 2008 \sin x \cos m$ dla

TAK pewnej wartości parametru m ma nieskończenie wiele rozwiązań

NIE pewnej wartości parametru m nie ma rozwiązań

TAK dla każdej wartości parametru m ma rozwiązania

19. Okrąg \mathcal{K} zadany jest na płaszczyźnie kartezjańskiej przez warunek $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$, a okrąg \mathcal{K}_a przez warunek $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 1 - 2a^2$ ($a \in \mathbb{R}$). Wówczas

NIE dla $a = 1$ okręgi te są styczne

NIE istnieją dokładnie dwie wartości parametru a , dla których okręgi \mathcal{K} i \mathcal{K}_a są styczne

NIE istnieje a , dla którego \mathcal{K} leży wewnątrz okręgu \mathcal{K}_a

20. Do każdej z 12 klas pewnego liceum uczęszcza ta sama, mniejsza niż 39, liczba uczniów. Pewnego dnia absencja w szkole wyniosła dokładnie 12 procent. Zatem

TAK do tego liceum uczęszcza co najmniej 279 uczniów

NIE rzezonego dnia było dokładnie 33 nieobecnych

TAK liczba dziewcząt w klasie III A jest inna niż liczba chłopców w tej klasie