

## XLVI MIĘDZYSZKOLNE ZAWODY MATEMATYCZNE

### 1. TEST

1. Dane są takie liczby całkowite  $k_1, k_2, \dots, k_{100}$ , że  $k_1 + k_2 + \dots + k_{100} = 100001$ . Wtedy co najmniej jedna z liczb  $k_1, k_2, \dots, k_{100}$  jest

**TAK** parzysta

**TAK** nieparzysta

**TAK** niepodzielna przez 3

2. Wypisujemy wszystkie liczby naturalne od 1 do  $n$  zapisane w systemie dziesiętnym. Niech  $C(n)$  oznacza ilość cyfr, które musieliśmy napisać. Wówczas

**NIE** istnieje takie  $n$ , że  $C(n) = 100$

**TAK** istnieje takie  $n$ , że  $C(n) = 201$

**TAK** liczba  $C(10^n)$  jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $n + 1$  jest podzielna przez 3

3. Reszta z dzielenia wielomianu  $W(X)$  przez wielomian  $X^4 - 2X^3 + X - 2$  jest równa  $X^3 + X^2 + 2$ . Wówczas

**TAK**  $W(-1) = 2$

**TAK**  $W(2) = 14$

**NIE** reszta z dzielenia wielomianu  $W(X)$  przez  $X^2 - X - 2$  wynosi  $2X + 14$

4.  $a, b, c, d$  są kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi ( $a < b < c < d$ ). Wówczas

**NIE** jeżeli  $2048|abcd$ , to  $a > 2005$

**NIE** jeżeli  $2005|a + b + c + d$ , to  $a = 1001$

**TAK**  $abcd \neq 2^{2005}$

5. Zbiorem rozwiązań nierówności  $ax^2 + bx + c > 0$  jest przedział  $(-5, 5)$ . Wynika stąd, że

**TAK**  $a < 0$  i  $b = 0$

**TAK**  $c = -25a$

**TAK**  $a + c > 0$

6. Niech  $L(a)$  będzie liczbą rzeczywistych rozwiązań równania  $|x - 2| + |x + 1| = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Wówczas

**TAK**  $L(2) < 2$

**TAK**  $L(3) > 3$

**NIE**  $L(4) > 4$

7. Trójmian kwadratowy  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) o współczynnikach całkowitych, ma tę własność, że  $f(2003) = f(2004) = 2005$ . Wówczas

**NIE** jest tylko jeden taki trójmian

**NIE** takich trójmianów jest co najwyżej  $2005^3$

**TAK**  $|f(0)| > 4 \cdot 10^6$

8. Wielomian  $W(X)$  o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  liczba  $W(k)$  jest podzielna przez 3. Wówczas

**NIE** wszystkie współczynniki wielomianu  $W(X)$  są podzielne przez 3

**TAK** jeżeli  $W(X)$  jest wielomianem stopnia drugiego, to wszystkie jego współczynniki są podzielne przez 3

**NIE** istnieje taki wielomian  $G(X)$  o współczynnikach całkowitych, że  $W(k) = G(k^3 - k)$  dla każdego całkowitego  $k$

9. Niech  $A$  będzie zbiorem rzeczywistych rozwiązań nierówności  $\sqrt{6-x} \geq x$  oraz niech  $B_m = \{x \in \mathbb{R} : (x+3)(x-2)(x-m) \leq 0\}$ . Wówczas

**NIE**  $A \subset B_{-5}$

**NIE**  $A \cap B_m$  jest zbiorem dwuelementowym dla każdego  $m > 2$

**TAK**  $A = B_m$  dla pewnego  $m \in \mathbb{R}$

10. Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla danej liczby rzeczywistej  $x$  przez  $[x]_n$  oznaczmy największą liczbę całkowitą podzielną przez  $n$  i nie większą niż  $x$ . Wówczas

**NIE** jeżeli  $\frac{1}{3}([x]_1 + [x]_2 + [x]_3) = [x]_1$ , to  $6 \leq x < 7$

**NIE** jeżeli  $[x]_2 = [x]_3 = [x]_4 = \dots = [x]_{2005}$ , to  $x \in [0, 2)$

**TAK**  $[x]_n = n \left[ \frac{x}{n} \right]_1$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  i  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

11. O zbiorze  $A$  ( $A \subset \mathbb{R}$ ) wiemy, że  $(0, 2) \subset A$  lub  $A \subset (5, \infty)$ . Niech  $B = \mathbb{R} \setminus A$ . Wówczas

**NIE**  $(0, 2) \not\subset B$  i  $B \not\subset (5, \infty)$

**TAK** jeśli  $1 \in B$ , to  $4 \in B$

**NIE**  $(0, 2) \cap B = \emptyset$  lub  $(5, \infty) \cap B = \emptyset$

12. Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$  będącymi liczbami wymiernymi. Wówczas

**TAK**  $a_n$  jest liczbą wymierną dla każdego  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

**TAK** jeżeli  $ra_1 = 1$  i  $r + a_1 = 2$ , to  $a_n = n$  dla każdego  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

**TAK** ciąg  $(b_n)$ , gdzie  $b_n = a_n - [a_n]$ , jest czystookresowy

13. Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  nazwiemy *arcyarytmetycznym*, gdy ciąg  $([a_n])$  też jest arytmetyczny. Wówczas

**TAK** każdy ciąg arytmetyczny o wyrazach całkowitych jest arcyarytmetyczny

**TAK** istnieje ciąg arcyarytmetyczny o różnicy niecałkowitej i mający 2005 wyrazów

**NIE** nieskończony ciąg arcyarytmetyczny może mieć różnicę niewymierną

- 14.** Jeżeli  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją nieparzystą, to
- NIE**  $f(|x|) = -|f(x)|$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$
  - TAK**  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |f(x)|$  jest funkcją parzystą
  - NIE**  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sin(f(x))$  jest funkcją parzystą
- 15.** Funkcje  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są takie, że ich złożenie  $f \circ g$  jest funkcją okresową, która nie jest funkcją stałą. Wówczas
- TAK**  $f$  może nie być funkcją okresową
  - NIE**  $g$  jest funkcją okresową
  - TAK**  $f$  i  $g$  mogą nie być funkcjami okresowymi
- 16.** Niech  $a \in \mathbb{R}$ . Oznaczmy przez  $T_a$  trójkąt wpisany w parabolę  $y = x^2$  o wierzchołkach, których rzuty na oś  $Ox$  mają odcięte  $a - 1$ ,  $a$ ,  $a + 1$ . Wówczas
- TAK** pole trójkąta  $T_a$  jest nie większe niż pole trójkąta  $T_0$  dla dowolnego całkowitego  $a$
  - NIE** pole trójkąta  $T_a$  jest większe niż pole trójkąta  $T_0$  dla pewnego  $a \in \mathbb{R}$
  - NIE** okrąg opisany na  $T_1$  ma promień równy 6
- 17.** Niech  $P$  będzie wykresem funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Niech  $P'$  oznacza obraz zbioru  $P$  przy jednokładności o środku w punkcie  $(0, -1)$  i skali 2, a  $P^*$  obraz zbioru  $P$  przy przesunięciu o wektor  $[1, 4]$ . Wówczas
- NIE**  $P'$  jest wykresem funkcji  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 + 1$
  - NIE**  $P \cap P'$  jest zbiorem pustym
  - NIE**  $P^* \cap P'$  jest zbiorem niepustym
- 18.**  $ABCD$  jest czworokątem wypukłym na płaszczyźnie. Wówczas możliwe jest, że
- NIE**  $D$  jest punktem przecięcia wysokości trójkąta  $\triangle ABC$
  - NIE**  $D$  jest punktem przecięcia środkowych trójkąta  $\triangle ABC$
  - TAK**  $D$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $\triangle ABC$
- 19.** Niech  $H$  oznacza punkt przecięcia wysokości trójkąta  $\triangle ABC$ . Wówczas
- TAK**  $C$  jest punktem przecięcia wysokości w trójkącie  $\triangle ABH$
  - TAK** jeżeli  $C$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $\triangle ABH$ , to  $|\sphericalangle C| = 120^\circ$
  - TAK** okrąg opisany na trójkącie  $\triangle ABC$  i okrąg opisany na trójkącie  $\triangle ABH$  mają równe promienie
- 20.** Trójkąt  $T$  na płaszczyźnie mający wierzchołki w punktach o obu współrzędnych całkowitych (w prostokątnym układzie współrzędnych) nazywamy *trójkątem  $S$ -kratowym*, gdy ma on pole 1. Wówczas
- NIE** suma długości wysokości trójkąta  $S$ -kratowego jest liczbą wymierną
  - NIE** co najmniej jedna z długości boków trójkąta  $S$ -kratowego jest liczbą wymierną
  - TAK** istnieje nieskończenie wiele parami nieprzystających trójkątów  $S$ -kratowych